第３講　回転体の体積（その１）

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$C : y=e^x$ に対して，原点を通る C の接線を l とする．C と l と y 軸によって囲まれる部分を x 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_1 と，y 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_2 をそれぞれ求めよ．

(2)　$\dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2 \leqq 1$ を x 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_3 を求めよ．

(3)　$C : y=\sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $l : y=1$ と y 軸によって囲まれる部分を y 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_4 を求めよ．

第３講　回転体の体積（その１）

3 次の各問いに答えよ．

(1) $C : y=e^x$ に対して，原点を通る C の接線を l とする．C と l と y 軸によって囲まれる部分を x 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_1 と，y 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_2 をそれぞれ求めよ．

(2) $\dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2\leqq 1$ を x 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_3 を求めよ．

(3) $C : y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $l : y=1$ と y 軸によって囲まれる部分を y 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_4 を求めよ．

【答】 (1) $V_1=\dfrac{e^2-3}{6}\pi$，$V_2=\dfrac{6-2e}{3}\pi$　(2) $4\pi^2$　(3) $\dfrac{\pi(\pi^2-8)}{4}$

【解説】 (1) $y=e^x$ より $y'=e^x$ なので, $x=t$ における C の接線は $y=e^t(x-t)+e^t$ となる．これが原点を通るので $0=e^t(-t)+e^t$ より $t=1$．よって $l : y=ex$ であり，接点は $(1,\ e)$ である．

このとき

$$V_1 = \int_0^1\pi(e^x)^2dx-\frac{e^2\pi\times 1}{3}=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\frac{e^2\pi}{3}=\frac{e^2-3}{6}\pi,$$

$$V_2 = \frac{1^2\pi\times e}{3}-\int_1^e\pi(\log y)^2dy=\frac{e}{3}\pi-\pi\Big[y(\log y)^2-2y\log y+2y\Big]_1^e=\frac{6-2e}{3}\pi$$

である．

(2) $\dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$ より $y=1\pm\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ なので

$$\begin{aligned}V_3 &= \int_{-2}^2\pi\left(1+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2dx-\int_{-2}^2\pi\left(1-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2dx\\ &= 4\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx\\ &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}|2\cos\theta|\cdot 2\cos\theta\,d\theta \quad (x=2\sin\theta\text{ と置換した})\\ &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos 2\theta)d\theta\\ &= 4\pi\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 4\pi^2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}V_4 &= \int_0^1\pi x^2dy\\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx \quad (y=\sin x\text{ と置換した})\\ &= \pi\Big[x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi(\pi^2-8)}{4}\end{aligned}$$